Gliederung

1. Abstrakt oder : Was ist denkbar ?

Unser Thema "Die Landung eines Objektes im Flächenland: Ansichten und Erklärungen eines mathematisch vorgebildeten Bewohners" entpuppte sich als stark, sehr stark abstraktes Thema. In der Mathematik gehen wir oft bis an die Grenzen des Vorstellbaren oder noch weiter, uns ging es genauso. Ein einfaches Beispiel, die Limes Bildung in dem Term 1 / x , wobei x gegen Null geht. Im Prinzip rechnen wir mit x gleich Null, obwohl dies über unseren Vorstellungshorizont hinaus geht und wir es deshalb als undefiniert definiert haben. Zur Zeit existiert noch keine konkrete Überlegung was die Division durch Null für ein definiertes Ergebnis liefert. Vielleicht wird es auch nie ein Mensch bestimmen können, aber dies ist ein anderes Thema. Schon bei den Vorüberlegungen zu unserem Thema stießen wir schnell an solch eine Grenze der Vorstellungskraft. Die Frage "Kann ich ein Objekt der dritten Dimension in der zweiten Dimension wiedergeben ?" führte schnell zu der Vermutung, dass alles 3-dimensional ist. Gibt es also keine realen existierenden Objekte der zweiten Dimension ? Wie viele Dimensionen gibt es überhaupt ? Ist die 0.-Dimension definiert ? Einige dieser Fragen werden wir im Folgenden lösen, zu einigen aber auch nur Lösungsansätze präsentieren können, da wir uns schnell dem Ende des Auffassungsbereich des Menschen näheren. Aber da zur Zeit nur ca. 2 Prozent des menschlichen Gehirns genutzt werden, ist es auch möglich, dass wir lernen mit solch abstrakten Dingen umzugehen. Der Aufbau der Facharbeit ist wie folgt: Da Marcus und ich z.T. verschiedene Ansätze hatten, bringen wir beide jeweils verschiedene Texte zu einem Thema. Von wem der jeweilige Titel entworfen wurde, dessen Initialien sind direkt nach dem Artikel zu sehen.

<u>[ns]</u>

2. Vorüberlegungen

Als Vorüberlegung wird angenommen, daß die höherdimensionalen Eigenschaften der Körper/Flächen bei der Projektion in eine niedrigere Dimension wegfallen. Als Beispiel sei hier der Flächeninhalt einer Fläche genannt, also wird bei Projektion eines Rechtecks in die erste Dimension die Eigenschaft "Flächeninhalt" wegfallen, d.h. nur die Längen der Begrenzungsflächen, dass sind eine eindimensionale Eigenschaften, bei der Projektion in Betracht gezogen werden müßen. In den weiteren Überlegungen wird diese Annahme als gegeben angesehen. Bei Kreisen wird natürlich nur eine Begrenzungslinie benutzt, nämlich der Umfang. Unter diesen Voraussetzungen können wir mit der Betrachtung von zweidimensionalen Körpern in eine eindimensionale Umgebung beginnen. Später betrachten wir die Projektion von dreidimensionalen Körpern in die zweite Dimension.

[mp]

2. Vorüberlegungen

Was versuchen wir überhaupt herauszufinden ? Die Antwort hierauf ist, dass wir versuchen Dimensionsänderungen vorzunehmen. Wir möchten höherwertige Dimensionen in niedrigere und andersherum projektieren. Das Problem stellt also die

Dimension dar. Doch um überhaupt weiterarbeiten zu können, benötigen wir die Antwort auf die Frage: "Was ist überhaupt eine Dimension ?" Dies ist relativ einfach mit Hilfe eines Lexikons zu beantworten: "Dimension 1) Ausdehnung(srichtung): geometrisch haben:Punkt 0, Gerade 1, Fläche 2, Raum 3 Dimensionen ..."[1]. Erstaunlicherweise sind wir auf selbige Überlegungen vorher auch schon gekommen. Ein Punkt hat nicht keine, aber Null Dimensionen. Er hat also Null Ausdehnung. Die Gerade besitzt eine Ausdehnung, die Fläche zwei, der Raum 3, existieren vielleicht noch mehr Dimensionen ? Diese Frage werden wir versuchen am Ende dieser Facharbeit zu beantworten.

[ns]

3. 2D -> 1D

3.1Probleme

- Kann man Flächen in die erste Dimension projizieren ?

Man kann nur nur das Modell einer Fläche, da diese immer dreidimensional ist, jedenfalls eine mit unseren Mitteln dargestellte Fläche (wobei die dritte Dimension vernachlässigbar gering ist, aber Genauigkeit hat noch Niemanden geschadet), in die erste Dimension projizieren, wobei das natürlich auch wieder nur ein Modell bzw. eine Modellvorstellung ist.

Bei den Flächen wird dann der Flächeninhalt wegfallen, da dies eine zweidimensionale Eigenschaft ist und somit in der ersten Dimension nicht mehr existent. Nur noch die Länge der Begrenzungslinien (der Umfang) ist ausschlaggebend für das eindimensionale Modell der Fläche.

- Was ist mit den höherdimensionalen Eigenschaften ?

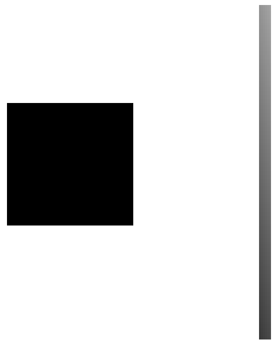
Hier wird angenommen, daß die höherdimensionalen Eigenschaften der Flächen wegfallen, es wäre aber ebenso möglich, daß die höherdimensionalen Eigenschaften irgendwie mit übernommen werden. Da wir aber mit unseren Mitteln nur eine Modellvorstellung der Projektionen vornehmen können, nehmen wir bei diesem Modell an einfach an, daß die höherdimensionalen Eigenschaften wegfallen, d.h. der Flächeninhalt einer Fläche wird nicht berücksichtigt bzw. fällt weg. Anderenfalls ständen wir vor einem nicht lösbaren Problem, da sich der Flächeninhalt aus einer unendlichen Zahl von eindimensionalen Linien zusammensetzen würde und somit die Länge des auf eine eindimensionale Linie projizieren Rechtecks unendlich werden würde. (Eine Linie hat nur eine Länge und keine Höhe, also Höhe = 0)

[Bild: ns][Text: mp]

3.1Probleme

Zuerst einmal beschäftigen wir uns mit der Frage, was passiert, wenn wir einen 2D-Körper in nur einer Dimension abbilden ? Um dies zu klären gehe ich noch einen Schritt weiter zurück. Bilden wir doch zuerst einen 1D-Körper in der nullten Dimension ab. Was passiert ? Da die Nullte-Dimension Null Ausdehnung besitzt, verschwindet unser 1D-Körper , z.B. die Gerade und verwandelt sich in einen Punkt.

Funktioniert dies auch bei der Umwandlung von 2D in 1D ?
Wechseln wir nun die Dimension und begeben uns zwischen die 2. und 3. Wir stellen uns folgendes vor: Wir haben eine Linie. Auf diese Linie bewegt sich ein Quadrat zu.



Die beiden verschiedenen Körper stoßen zusammen. Verschwindet nun wieder die Ausdehnung aus der größeren Dimension ?

Oder aber passiert etwas ganz anderes, "schmilzt" das Quadrat vielleicht und verlängert so diese Linie mit seinem Flächeninhalt ?

Das wäre die Idee, die auch Marcus schon beschrieben hat. Allerdings existiert noch eine weitere Möglichkeit. Wieder einmal bewegt sich das Quadrat auf die Gerade hinzu. Wir überlegen, welche Breite besitzt die Gerade ? Antwort: Keine, also B=0. Die Strecke sei nun 5LE lang, das Quadrat habe eine Seitenlänge von 5LE. Wenn wir nun versuchen uns zu überlegen, wie oft die 5 in 0 passt entspricht dies der Gleichung

$$X / 0 = 5$$

, welche laut Mathematik zwar undefiniert ist, wir aber hier als Ergebnis einmal unendlich annehmen, da das Quadrat unendlich oft in die Strecke hineingehen kann.

[ns]

3.2Möglichkeiten

- Möglichkeiten für die Projektion von Flächen in die erste Dimension.

Beispiel Rechteck:

Nehmen wir an, wir haben ein Rechteck mit den Kantenlängen von $a = 5$ cm und $b = 3$ cm. Dieses wollen wir jetzt in die erste Dimension projizieren. Dazu nehmen wir schon das oben beschriebene Verfahren, also $2a + 2b = 16$ cm. In der ersten Dimension erhalten wir somit eine Linie von 16 cm Länge. Diese Linie ist das in die erste Dimension projizierte Rechteck, bei welchem die zweidimensionale Eigenschaft des Flächeninhalts $a*b = 15$ cm² weggefallen ist.

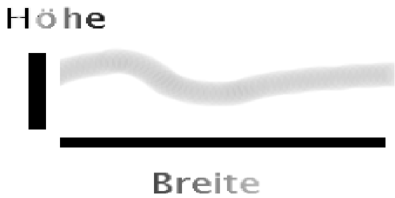
Beispiel Kreis:

Als nächstes Beispiel nehmen wir einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm. Den Umfang erhalten wir aus der Formel 2 (Pi) r = 18,8 cm. Da nun der Flächeninhalt von 4 (Pi) r² = 113 cm² wegfällt erhalten wir eine Linie der Länge 18,8 cm, welche dem auf die erste Dimension projizierten Kreis entspricht.

[Bild: ns]

Nun erörtern wir, ob eine Kurve eindimensional oder zweidimensional ist.

Eine Kurve hat sowohl eindimensionale als auch zweidimensionale Eigenschaften. Ihre eindimensionale Eigenschaften besteht darin, daß sie nur eine Länge, nicht aber eine Höhe hat. Aber zugleich kann sie nur in der zweiten Dimension beschrieben werden, da eine Krümmung nicht in einem eindimensionalen Umfeld beschrieben werden kann. Eine Kurve ist somit eine eindimensionale Linie, die in ein zweidimensionales Umfeld projeziert und unter zweidimensionalen Gesichtspunkten verändert wurde. Damit haben wir ein Phänomen welches nicht rein eindimensional beschrieben werden kann, da die Kurve eine Krümmung besitzt und somit nur in einem zweidimensionalen Umfeld beschrieben werden kann, aber auch nicht rein zweidimensional, da eine Kurve eine gekrümmte Linie ist und deshalb keine Höhe besitzt und nicht zweidimensional ist. Die Kurve ist eine Form von Zwischendimensionalität, da sie keiner Dimension ohne Einschränkungen zugeordnet werden kann. Sie ist als Zwischenstufe der ersten und der zweiten Dimension zu interpretieren, da sie eindimensionale Eigenschaften besitzt, zugleich aber auch zweidimensionale und nur in der zweiten Dimension beschrieben werden kann.



[Bild: ns][mp]

3.2.1Beispiele in der Programmiersprach C [Array]

- Erläuterung anhand des Beispiels eines Arrays der Programmiersprache C

In der Programmiersprache C gibt es sogenannte Arrays, dass ist im Prinzip eine Möglichkeit eine bestimmte Anzahl von Variablen (z. B. ganze Zahlen, einzelne Buchstaben, Buchstabenketten, Fliesskommazahlen) unter einem Namen mit der Verwendung von Indices zu speichern. Bei diesen Arrays gibt es auch Dimensionen, auch wenn diese nicht direkt räumlich sind, eignen sie sich doch zur Verdeutlichung der Projektion von Flächen in die erste Dimension. Bei einem zweidimensionalen Array gibt es zwei Indices hinter dem Namen des Arrays, z.B. Array[x][y]. Das kann man mit einer Tabelle vergleichen, wobei x die Spalte und y die Zeile angibt. Auch dieses Array kann man in ein eindimensionales Array umwandlen. Man nehme alle Elemente von Array[0][0] bis Array[0][n]. Diese Daten werden dann als Array2[0] bis Array2[n] bezeichnet. Dann nimmt man die Daten aus Array[1][0] bis Array[1][n] und bezeichne diese als Array2[n+1] bis Array2[2n+1]. Diesen Schritt wiederhole man und am Ende (bei Array2[n^2+1]) hat man eindimensionales Array mit demselben Dateninhalt wie das zweidimensionale Array. Leider kann man dieses eindimensionale Array nur als Zahlenkette und nicht mehr als Tabelle wie das zweidimensionale Interpretieren, also auch hier fällt eine zweidimensionale Eigenschaft weg.

[mp]

3.2.1Beispiele in der Programmiersprach C [Array]

Im folgendem Stelle ich einfach den Quellcode eines Programmes in der genannten Programmiersprache vor. Anhand der Kommentare (in C der Text zwischen „/*“ und „*/“, in Pascal „{“ und „}“) sollte es möglich sein, die Quelltexte zu verstehen!

```
/******************************************************************
 * Ein Beispiel der Dimensionsschrumpfung in der Programmiersprache
 * C.
 *
 * Zum Ausfuehren mit einem C-Compiler uebersetzen
 *
 *
```

```
 * Author: Nico Schottelius <nico AT schottelius DOT org>
 * Date: 19th of March 2k+1
 * Last Changed: 19th of March 2k+1
 ***************************************************************/


/* Diese Zeile bindet die Ein - und Ausgabefunktionen ein */
#include <stdio.h>

/* Hier beginnt das Hauptprogramm */
int main()
{

   /* Die Variable "erste" wird definiert und initialisiert mit 0
    * DIMENSION: nullte */
   int erste=0;

   /* Das Feld "feld" wir mit 10 Spalten gebildet
    * DIMENSION: erste */
   int feld[10];

   /* Wir setzten die Werte der Spalten */

   feld[0] = 2;          /* erste Spalte ist 2 */
   feld[1] = 8;          /* zweite Spalte ist 8, usw... */
   feld[2] = 4;
   feld[3] = 5;
   feld[4] = 4;
   feld[5] = 8;
   feld[6] = 2;
   feld[7] = 9;
   feld[8] = 6;
   feld[9] = 5;

   /* Wir setzen zwei unterschiedliche Dimensionen gleich,
    * der Uebersetzer warnt uns vor:
    *
    * c-beispiel.c: In function `main':
    * c-beispiel.c:48: warning: assignment makes integer from pointer without a cast
    */
   erste = feld;

   /* Wollen wir mal sehen was nach dieser eher undefinierten Operation
    * fuer ein Ergebnis vorlieg */

   printf("Wert von erste ist : %d\n", erste);

   /* Wie nicht anders zu erwarten, erhalten wir nur eine beliebige
    * Zahl, die nicht definiert ist.
    * Somit scheitert unser Versuch, Dimensionensschrupfungen
    * in der Programmiersprache C durchzufuehren.
```

```
   */
}
```

[ns]

3.2.2 Beispiele in der Programmiersprach Pascal [Array]

Da die verschiedenen Programmiersprachen auch z.T. andere Ergebnisse liefern, hier ein Beispiel in Pascal:

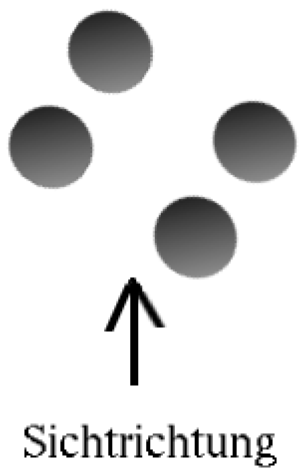
```
{****************************************************************
 * Ein Beispiel der Dimensionsschrumpfung in der Programmiersprache
 * Pascal.
 *
 * Zum Ausfuehren mit einem Pascal-Compiler uebersetzen
 *
 *
 * Author: Nico Schottelius <nico AT schottelius DOT org>
 * Date: 24th of March 2k+1
 * Last Changed: 24th of March 2k+1
 ****************************************************************}


{ Der Programm - Name }
PROGRAM dim_test;

{ Die Variable "erste" wird definiert und initialisiert mit 0
DIMENSION: nullte }

VAR  erste : INTEGER;

{* Das Feld "feld" wir mit 10 Spalten gebildet
DIMENSION: erste }

VAR feld : ARRAY [0..9] of INTEGER;


{* Hier beginnt das Hauptprogramm *}
BEGIN


   {* Wir setzten die Werte der Spalten *}

   feld[0] := 2;           {* erste Spalte ist 2
   feld[1] := 8;            * zweite Spalte ist 8, usw... *}
   feld[2] := 4;
   feld[3] := 5;
   feld[4] := 4;
   feld[5] := 8;
```

```
  feld[6] := 2;
  feld[7] := 9;
  feld[8] := 6;
  feld[9] := 5;

  erste := feld;
  {
   * Wir setzen zwei unterschiedliche Dimensionen gleich,
   * der Uebersetzer meckert und laesst uns das Programm nicht
   * uebersetzen:

    pas-beispiel.pas: In function `program_Dim_test':
    pas-beispiel.pas:50: incompatible types in assignment

   * Somit scheitert auch unser Versuch, Dimensionensschrupfungen
   * in der Programmiersprache Pascal durchzufuehren!
  }

END.
```

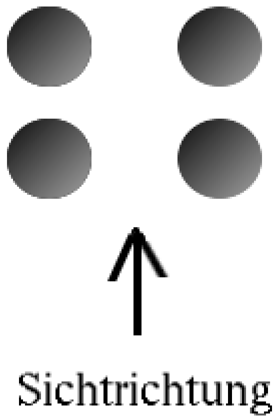
[ns]

3.3Sicht aus 1D auf 2D

Was sieht nun aber unser Bewohner ? Die einfache Antwort ist: Einen Auschnitt aus dem höheren Objekt. Die kompliziertere ist: Ganz viele verschiedene Objekte. Zuerst einmal möchte ich die erste Antwort ausführen. Wir knien uns einfach vor einen Tisch. Auf diesen Tisch legen wir ein durschnittliches Plüschtier. Sagen wir dieses Plüschtier hat 4 Beine. Nun senken bzw. heben unsere Augen soweit, dass wir senkrecht auf die Tischkante sehen. Etwas über der Tischkante sehen wir vier Kreise, beziehungsweise 4 Teile von Kreisen, da wir uns zur Zeit im Zweidimensionalen Raum denken müssen.

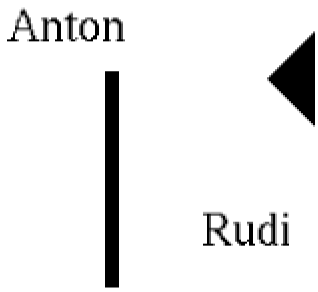


Drehen wir unser 3-dimensionales Objekt ein wenig in die besondere Stellung, wie auf dem nächsten Bild zu sehen ist, so sieht der Betrachter nur 2 Kreise!



Allerdings ist es ihm sowieso nie möglich alle Seiten eines Kreises zugleich zu sehen, da es Wesen, die Objekte gleicher Dimension betrachten, nie möglich ist, das gesamte Objekt zu besehen. Für uns Menschen ist es nicht mölich, einen gesamten 3-dimensionalen Körper zu besehen. Egal wie klein oder groß er ist. Ich habe mich vor einen Notizblock gesetzt und ausprobiert, wie viele Seiten ich von diesem 6-seitigen Gebilde zugleich wahrnehmen kann, das Maximum stellt drei Seiten zugleich dar. Natürlich lässt sich diese "Schwäche" mit Hilfe von Zusatzmitteln, wie z.B. Spiegel beheben. Ich halte es aber für unwahrscheinlich, dass Wesen der zweiten Welt es geschafft haben, einen Spiegel zu entwickeln, darum lasse ich diese Möglichkeit aus der Betrachtung heraus.

Nun zu der komplizierteren Antwort. Zuerst einmal betreten wir hierbei den Raum (wenn man dies überhaupt so nennen darf) des 1-dimensionalen Wesens, das wir Anton nennen. Es lebt und gedeiht in seiner Geraden. Eines Tages bemerkt er einen Eindringling, und er wird immer größer! Was passiert hier ? Nun, von außen können wir erkennen, dass Anton, unsere Bewohner der Geraden, von Rudi, dem Dreieck, durchkreuzt wird.

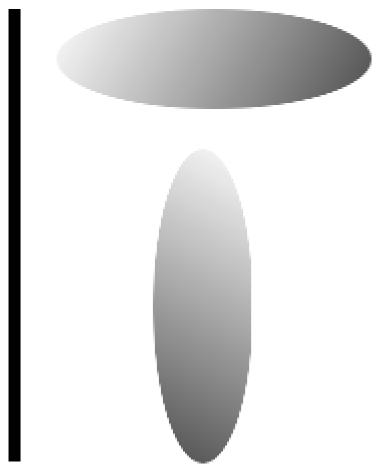


Je weiter Anton von Rudi durchkreuzt wird, desto grösser kommt Anton Rudi vor, bis Rudi auf einmal ganz verschwunden ist. Was passiert aber nun, wenn sich unser Rudi dreht, während er Anton durchkreuzt ? Oder nur, wenn sich Rudi nicht von der Stelle bewegt und sich nur dreht ? Im zweiten Fall würde Anton auch auch eine für ihn schon fast chaosartige Veränderung des Eindringlings beobachten. Im ersten Fall ist es für ihn kaum noch erklärbar, da sich die Veränderung in seinem Land nicht mehr einfach folgern läßt. Nehmen wir einmal an, unserem Rudi wäre es möglich, sich auch der dritten Raum-Achse zu bedienen und sich in alle 3 Richtungen zu bewegen und zu drehen. Ich denke, die Leute mit den weißen Kitteln, wenn sie eine Gerade fassen könnten würden ihn mitnehmen müßen, oder anders ausgedrückt: Es exitieren schon bei solch einem einfachen Beispiel genug Faktoren, um jemanden aus der ersten Dimension Kopfzerbrechen zu machen.

Doch jetzt geht es unserem Anton erst richtig an den Kragen, wir hetzen ihm einen Kreis "auf die Linie". Hierbei müssen wir zwischen zwei verschiedenen Kreisvarianten unterscheiden: Einmal dem ausgefüllten und dem unausgefüllten Kreis. Im ersten Fall wird unsere Linie in einem zusammenhängendem Stück von dem Kreis geschnitten, das zwischen Null Längeneinheiten oder maximal Durchmesser des Kreises lang sein kann. Im zweiten Fall würde unsere Strecke garnichts bemerken. Warum ? Der Kreis schneidet zwar die Linie, aber die Breite der Kreislinie ist ja Null und somit kann Anton auch nicht schneiden.

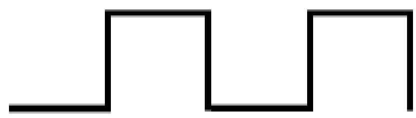
Bevor wir zum nächsten Objekt kommen, möchte ich eine kleine Anmerkung machen: In diesem Text werden die Begriffe "Strecke", "Linie" und "Gerade" synonym verwendet. Zwar wird in der Mathematik grundsätzlich zwischen diesen Begriffen unterschieden, allerdings ist für diese Betrachtung der Unterschied nicht wesentlich. Ich bitte deshalb diesen Fehler zu tolerieren.

Im Weiteren gehe ich auf die Objekte Oval und Rechteck ein. Die Größe vom Kreis und Oval, die der Linienbewohner bemerkt ist sehr gut durch eine nach unten geöffnete, im ersten Quadraten befindende, Parabel zu beschreiben. Erst ist die Größe Null, in der Mitte erreicht sie ihr Maximum und nimmt danach genauso wieder ab, wie sie zugenommen hat. Dies ist beim Kreis immer der Fall, beim Oval nur, wenn dieses sich senkrecht zur Linie annährt.

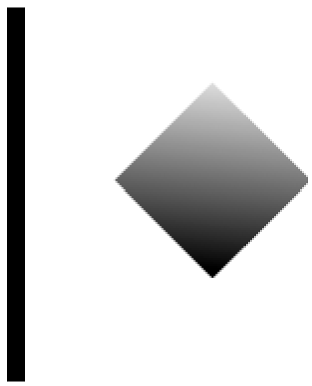


Sollte das Oval sich nicht in einem dieser beiden Winkel annäheren, so gleicht die Größenzunahme nicht mehr einer Parabel. Wie sie dann allerdings genau aussieht kann ich zur Zeit auch nicht sagen. Noch interessanter ist es, wenn sich der Winkel ständig sich ändern würde, während sich das Oval auf die Linie zubewegt.

Das Rechteck ist ein etwas einfacher zu beobachtender Körper. Wir gehen hier sogar vom Idealfall Quadrat aus, was die Betrachtung noch weiter vereinfacht. Nähert sich das Quadrat senkrecht zur Linie, so nimmt es in jeder Überschneidungsposition die Länge einer seiner Seiten ein. Die Funktion der Größenzunahme könnte man hier mit Hilfe der Funktion des Rechteckstroms beschreiben.



Nähert es sich im 45 Grad Winkel,



so verhält sich die Größenzunahme wie eine Parabel.

Wie sich auch alle diese Objekte unserer Linie Anton nähern, so entsteht für ihn immer eine oder mehrere Strecken-ähnliche Gebilde, unabhängig vom eintreffendem Objekt.

[ns]

4. 3D -> 2D

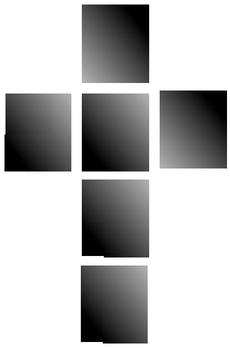
4.1Probleme

- Kann man Körper überhaupt in eine niedrige Dimension (die zweite) projizieren ?

Das kann man nur als Modell (wie auch bei Punkt 3.1 erwähnt), da wir alles dreidimensional wahrnehmen, also auch zweidimensionale Flächen, z.B. im Mathematikunterricht, dreidimensional sind, aber die dritte Dimension (die Höhe) vernachlässigbar gering ist. Alles folgende sind theoretische Überlegungen die nicht nachweisbar, aber logisch zu folgern sind. Auch die Beobachtungen eines zweidimensionalen Wesens kann man nur folgern, aber nie beweisen, da unser Denken vollkommen dreidimensional ist und wir uns eine zweidimensionale Ansicht der Dinge nicht richtig vorstellen können. Wir können nur begründete Annahmen, dass ein zweidimensionales Wesen einen dreidimensionalen Körper so und nicht anders sehen würde, bringen. Unsere Ansicht eines zweidimensionalen Körpers ist immer eine andere als die eines in der selben Dimension lebenden Wesens, da wir die zweidimensionalen Körper immer aus der "Vogelperspektive" darstellen, die aber für ein zweidimensionales Wesen nicht vorstellbar ist. In der zweiten Dimension existiert keine Höhe, aus der wir aber das Modell eines zweidimensionalen Körpers sehen.

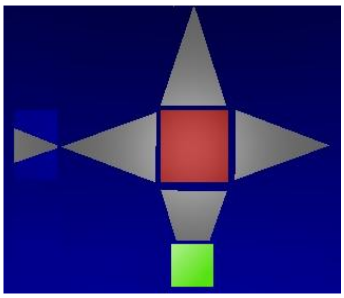
- Wie sieht das Gitternetz einer zweidimensionalen Projektion aus ?

Es gibt beliebig viele Möglichkeiten wie dieses Gitternetz aussehen könnte,
eine Möglichkeit ist in der Skizze gezeigt.



[Bild: ns]

Es gibt keine uns denkbare Möglichkeit das Aussehen des Gitternetzes zu bestimmen, also gehen wir der Einfachheit halber davon aus, das es einfache Flächen im Gitternetz sind, solche wie Quadrate, Rechtecke, Dreiecke etc., wir gehen davon aus dass das Gitternetz die jeweils am einfachsten zu berechnenden Flächen beinhaltet. Ausserdem muss die Topologie der zweiten Dimension berücksichtigt werden. Wenn sich schon eine Fläche auf der zu belegenden Stelle befindet, muss man ein etwas aufwendigeres Gitternetz benutzen um die Projektion darzustellen.



Hier eröffnet sich eine interessante Paralle zur Ableitung, da eine beliebige Anzahl abgeleiteter Gleichung bei denen jeweils nur das absolute Glied verschieden ist immer die gleiche Ableitung ergeben. Ein Beispiel ist ein Term der Form $2x^2 + 3x + n$, wobei n eine beliebige Zahl sein kann. Bei diesen Termen kommt als Ableitung immer $4x + 3$ als Ergebnis raus.

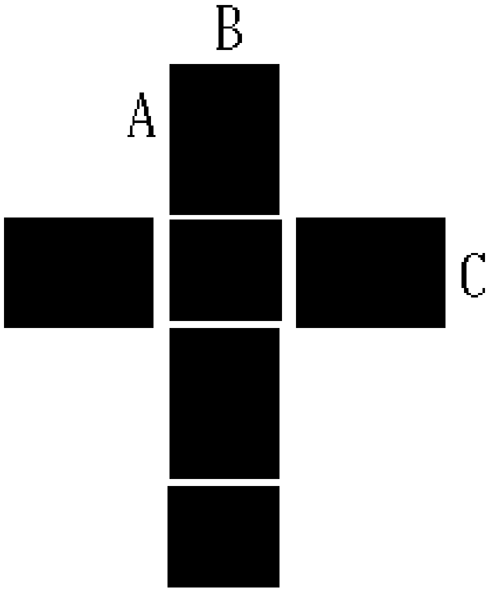
- Wie stellt man die Oberfläche einer Kugel zweidimensional dar ?

Soweit es uns bekannt ist kann man die Oberfläche einer Kugel nicht in die zweite Dimension projezieren. Deswegen gibt es auch kein Beispiel einer Kugel die in die zweite Dimension projeziert wird.

[mp]

4.2Möglichkeiten

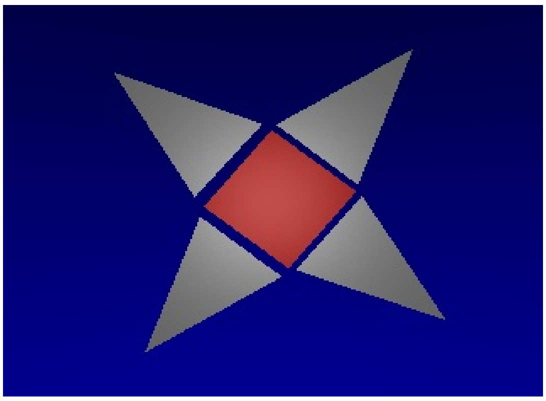
- Beispiel eines Quaders
Beim Quader werden die Grundflächen als Gitternetz in die zweite Dimension projeziert. Sie werden zusammenhängend dargestellt.



[Bild: ns]

Die einzelnen Flächen werden addiert, für einen Quader mit a = 4 cm, b = 3 cm und c = 3,5 cm ergibt sich damit der Wert: 2 ab + 2 ac + 2 bc = 24 cm² + 28 cm² + 21 cm² = 73 cm². Dieser Wert ist die Oberfläche, also kann allgemein sagen der Flächeninhalt der zweidimensionalen Projektion ist gleich dem der Oberfläche, man kann sogar sagen die zweidimensionale Projektion ist die Oberfläche.

- Beispiel einer Pyramide
Die Grundflächen einer Pyramide sind wieder als Gitternetz angeordnet.

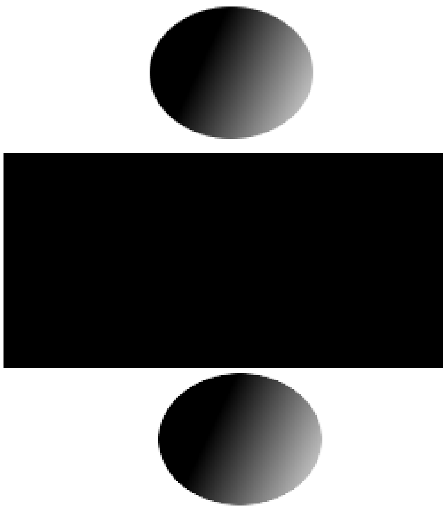


Wie auch bei dem Quader werden die einzelnen Grundflächen addiert, die dreieckigen Grundflächen sind gleichschenklig, mit dem Seitenwert a = 11,6 cm und die Grundfläche c ist gleich 9,4 cm. Die Werte mögen etwas komisch sein, aber ich habe sie an einer Pyramide gemessen die wir zu Hause stehen haben. Um den Flächeninhalt der Dreiecke auszurechnen brauchen wir die Höhe auf c, welche wir kriegen indem wir das Dreieck halbieren und mit dem Satz des Phytagoras die Höhe berechnen, welche nun die Grundfläche ist. Als Höhe hc kriegen wir 12,5 cm (gerundet). Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist somit:

$hc * c = 12,5 * 9,4 = 117,5$ cm², da wir einfach nur die Formel für das halbe Dreieck mit 2 multiplizieren muessen um die Formel für ein ganzes Dreieck zu bekommen. Die Formel für ein halbes Dreieck ist 1/2 Höhe von c mal c, und da wir mit 2 multiplizieren kann man das 1/2 streichen und wir behalten Höhe von c mal c über, also die oben angegebene Formel. Das Quadrat, welches als Grundfläche der Pyramide dient, hat den Flächeninhalt $c^2 = 9,4^2 = 88,36$. Den Flächeninhalt der gesamten Projektion erhalten wir indem wir die Flächeninhalte der vier Dreiecke und des Quadrats miteinander addieren, $4 * hc * c + c^2 = 4 * 117,5 + 88,36 = 470 + 88,36 = 558,36$ cm². Auch in diesem Fall ist die Oberfläche wieder gleich des Flächeninhalts der zweidimensionalen Projektion.

- Beispiel eines Zylinders

Wir nehmen einen Zylinder mit der Länge l = 6 cm und dem Radius der Kreisfläche r = 2 cm.



[Bild: ns]

Um die Oberfläche bzw den Flächeninhalt der zweidimensionalen Projektion auszurechnen müssen wir erst den Flächeninhalt des Rechtecks und den der Kreisflächen ausrechnen. Der Flächeninhalt der Kreisflächen ist 4 (pi) r² = 50,3 cm² (gerundet) und der Flächeninhalt des Rechtecks ist gleich des Umfangs der Kreisfläche (2 (pi) r = 12,6 cm (gerundet)) multipliziert mit der Länge l, also 12,6 * 6 = 75,6 cm². Der Flächeninhalt der zweidimensionalen Projektion ist 2 * 50,3 + 75,6 = 100,6 + 75,6 = 176,2 cm².

[mp]

4.3Synonyme zur Projektion zweidimensionaler Flächen in die erste Dimension

Bei beiden Projektionen, also der von zweidimensionalen Flächen in die erste Dimension als auch der von dreidimensionalen Körpern in die zweite Dimension, werden die Begrenzungen als Abbild des Körpers bzw der Fläche in der niedrigeren Dimension genommen, d.h. bei Flächen wird die Länge des Umfangs als Länge der Abbildung in die niedrigere Dimension genommen, bei Körpern der Flächeninhalt der Oberfläche als Flächeninhalt des Abbilds. Des weiteren fällt bei beiden Projektion die jeweils hoeherdimensionale Eigenschaft weg, bei zweidimensionalen Flächen fällt also der Flächeninhalt weg, bei dreidimensionalen Körpern fällt das Volumen bzw der Rauminhalt weg.

[mp]

4.4Aufgabenbeantwortung/Befassung/Sicht aus 2D auf 3D

Ansichten und Beobachtungen eines zweidimensionalen Beobachters
bei der Landung eines Körpers im Flächenland.

Als erstes wird der Beobachter feststellen das plötzlich ein für ihn wahrnehmbares Objekt, d.h. zweidimensional, in seiner Welt erscheint bzw aus der dritten, für ihn nicht wahrnehmbaren, Dimension in die zweite Dimension projeziert wird. Am Ende der Projektion wird in seiner Welt ein neues Objekt existieren, welches ohne sichtbaren Ursprung ist.
Er wird sich unter Umständen an die in der Wissenschaft postitulierte, aber nie bewiesene dritte Dimension entsinnen, und sich somit fragen ob er grad ein dreidimensionales Objekt, welches in seine, die zweite, Dimension übergegangen ist und jetzt für ihn in seiner zweidimensionalen Eigenschaft sichtbar geworden ist. Nachdem er dieses Objekt dann ausgemessen hat wird er sich in seiner wissenschaftlichen Neugier fragen wie die dritte Dimension wohl aussehen wird. Aufgrund seiner beschränkten, zweidimensionalen Wahrnehmung kann er sich ein Grösse wie die Höhe eines Objektes nicht vorstellen und es wird ihm auch nicht möglich sein sich die ursprüngliche Gestalt des Objektes vorzustellen. Er kann sich die Höhe nur als hypothetische Grösse vorstellen und annehmen, das einige Grenzflächen in der höheren Dimension anders liegen als in seiner Dimension. Aufgrund dieser theoretischen Überlegung wird er sich fragen welche der Grenzlinien in der dritten Dimension anders ausgerichtet sind als in der zweiten Dimension. Er wird die Analogie zur ersten Dimension sehen und sich die Flächen als Linien vorstellen und den Zusammenhang zur Entstehung eines Quadrates aus einer Linie sehen. Bei der Entstehung eines Quadrates aus einer Linie werden Teile der Linie in eine höhere, die zweite, Dimension überführt und als Grenzflächen des neu entstehenden Quadrates benutzt. Wenn er dieses Prinzip auf die zweite Dimension überträgt wird ihm klarwerden dass manche der ihm sichtbaren Flächen in eine höhere, die dritte, Dimension überführt werden müssen um als Grenzflächen eines dreidimensionalen Objektes zu dienen. Durch genaues Ausmessen der Seitenlinien wird ihm das Gesamtbild der Fläche klar und er wird erkennen das es nur eine sinnvolle Form gibt in der das Objekt zurück in die dritte Dimension projeziert werden kann. Mit seinem zweidimensionalen Vorstellungsvermögen ist er nicht in der

Lage diese Form graphisch darzustellen oder sich auch nur im Ansatz vorzustellen. Trotzdem hat er bei Betrachtung einer niedrigeren Dimension Erkenntnisse gewonnen wie eine höhere Dimension beschaffen sein muss und somit ein ziemliches Gedankenkunststück geschafft.
Auch wir als dreidimensionale Wesen können in etwa empfinden wie er sich das vorstellen muss, da wir wissen das vierdimensionale Körper dreidimensionale als Grenzflächen haben, aber nicht wie diese Grenzflächen liegen müssen da einige Positionen höherdimensional beschaffen sind. Als Grundlage können wir den Würfel nehmen, welcher 6 Quadrate als Grundflächen bzw als Grenzen hat. Diese Quadrate haben wiederum 4 Linien als Grenzen. Wenn wir uns diese Reihe in die vierte Dimension erweitert vorstellen hat somit ein vierdimensionaler Körper, der Würfel als Grenzen hat, 8 Grenzen. Auch kann man mit dieser Analogie feststellen das jeweils nur eine Grenze für ein niederdimensionalen Beobachter erkennbar ist. Welche das ist kann man mit herkömmlichen Mitteln nicht erfassen, dazu muss man sehen wo der niederdimensionale Beobachter mit seiner Dimension in Bezug auf den Körper steht. Somit kommt es in den meisten Fällen vor das der niederdimensionale Beobachter gar keine Grenze des betreffenden Körpers sieht, da seine Dimension an der falschen Stelle im Bezug auf den Körper ist.

[mp]

5. 4D -> 3D

5.1 Probleme und Möglichkeiten

Wie würde die dreidimensionale Projektion eines vierdimensionalen Körpers aussehen ?

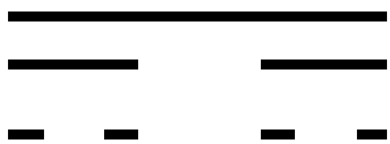
Als erstes sollten wir uns klar werden wie ein Körper aufgebaut ist, aber daß können wir uns nur am Beispiel eines dreidimensionalen Körpers klarmachen, da Vierdimensionalität über unsere begrenzte Vorstellungskraft geht. Ein dreidimensionaler Körper hat niederdimensionale Grenzflächen, d.h. ein Würfel hat 6 Quadrate als Grenzflächen, eine Pyramide hat 4 dreieckige und eine quadratische Grundfläche oder auch nur 4 dreieckige Grundflächen, wenn wir von einer Pyramide mit dreieckiger Standfläche ausgehen. Ein Quadrat hat 4 Strecken als Begrenzungen. Wenn wir diese Reihe weiterverfolgen hat ein vierdimensionaler Körper, der Würfel als Grenzkörper hat, 8 Würfel als Grenzkörper. Davon wird ein Würfel komplett in unserer Dimension verbleiben, der Standkörper, genauso wie beim Würfel auch ein Quadrat komplett in der zweiten Dimension verbleibt, nämlich die Standfläche des Würfels. Die anderen Körper werden nur noch zum Teil in unserer angestammten Dimension verbleiben oder auch gar nicht mehr in unserer Dimension erkennbar sein. Dies kann man aus der Analogie zu dem Würfel sehen, wo auch nur ein Quadrat komplett in der zweiten Dimension verbleibt, die Anderen aber nur zum Teil in dieser Dimension verbleiben oder auch überhaupt nicht mehr in dieser Dimension verbleiben (das Quadrat gegenüber der Standfläche). Vielleicht kann man noch die Analogie zu dem zweidimensionalen und dreidimensionalen Koordinatensystem nehmen. Die Z-Achse des dreidimensionalen Koordinatensystems muss genau im 90° Winkel zu der X und der Y Achse liegen. In einem vierdimensionalen Koordinatensystem muss die vierdimensionale Achse, nennen wir sie einfach W, genau im 90° Winkel zu den drei dreidimensionalen Achsen liegen. Aber da die W-Achse in einer für uns unvorstellbaren Dimension liegt, können wir uns das genauso wie vierdimensionale Körper nicht vorstellen. Als Fazit kann man sagen, daß wir zwar theoretische Überlegungen anstellen können, aus welchen dreidimensionalen Körpern ein vierdimensionaler Körper besteht, aber nicht wie diese angeordnet sind. Um etwas über die Anordnung sagen zu können müssten wir uns die vierte Dimension bildlich vorstellen können. Da wir uns die vierte Dimension aber nicht vorstellen können wird die Anordnung der dreidimensionalen Grenzen eines vierdimensionalen Körpers wohl immer ein Rätsel bleiben.

[mp]

6. Überlegungen von anderen Mathematikern

6.1Chaos-Theorie

Wieder einmal im theorethischen Bereich angelangt, beschauen wir uns nun die Chaos Theorie, welche sich unter anderem auch mit dem Thema Dimensionen beschäftigt. Hierbei erfuhren wir das erste Mal von gebrochenen Dimensionen. Gebrochenen Dimensionen ? Ja, es scheinen auch noch Dimensionen zwischen der nullten und ersten Dimension zu exitieren! Ein Beispiel hierfür: Die Cantormenge. Diese Cantormenge wird durch einen ganz bestimmten Vorgang gebildet: Wir gehen aus von einer Strecke. Diese Strecke wird in 3 Teile aufgteilt. Das mittlere Stück wird entfernt. Im nächsten Schritt werden die beiden neu entstandenen Stücke wieder aufgeteilt und es wird wieder der mittlere Teil entfernt.



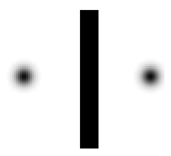
Führt man diesen Vorgang bis in das Unendliche fort, so erhält man eine Punktmenge, welche aus unendliche vielen Punkten besteht, aber die Länge 0 besitzt! Welche Dimension hat nun diese Cantormenge ? Georg Heinrichs beantwortet in seinem Buch die Frage wie folgt: Da diese Punktmenge mächtiger ist, als ein Punkt, aber weniger mächtig ist als eine Linie, muss sich die Dimension zwischen 0 und 1 bewegen.

[ns]

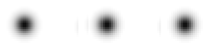
6.2 Stellungsnahme

Die Idee der Chaos Theorie und die Beschreibung der Cantormenge und Ausführung in eine gebrochene Dimension überzeugte mich beim ersten Lesen. Allerdings kann ich der Argumentation bei genauerem Hinsehen nicht zustimmen. Denn im Prinzip entsteht ja trotzdem nur eine ganz normale unendlich große Punktmenge. Diese würde auch entstehen, wenn ich einen Punkt nehmen würde, ihn an einer beliebigen

Achse spiegeln würde. Danach werden die neu entstandenen Punkte wieder an der selben Achse gespiegelt.



Es entsteht auch eine unendliche Punktemenge im n-ten Schritt, die Länge ist auch 0. Meiner Meinung nach ist dies jedoch noch kein Grund eine neue Dimension zu definieren, da diese Punktmenge doch wunderbar in die 0-te Dimension passt! Oder ein anderes Beispiel: Wir haben 3 Punkte, die durch eine Linie verbunden werden können.



Nun legen wir eine Spiegelachse durch den mittleren Punkt, wobei sie in einem beliebigen Winkel zu der imaginären Strecke durch die 3 Punkte liegen darf. Nun werden alle Punkte an dieser Achse gespiegelt. Im nächsten Schritt wird die Achse um einen Winkel von 1/n (n ist der Schritt) gedreht. Der Winkel kann aber auch beliebig gross oder klein sein, 1/n ist bloß eine Idee. Dies führe man bis in das Unendliche fort, und tada, wieder entsteht eine Punktmenge, die aus unendlich vielen Punkten besteht, allerdings nur eine endliche Fläche einschließt. Zumindest entsteht in meinen Überlegungen einem Kreis ähnliche Form. Vielleicht kann man diese Figur später einmal im Unterricht mit WinFunktion nachweisen, wenn das Program diese Art von Zeichnungen ermöglicht. Nehmen wir einmal an, es würde wirklich die vermutete Figur entstehen, so müsste ich trotzdem nicht für sie eine neue Dimension einführen, obwohl sich eine endliche Fläche mit unendlich vielen Punkte darstellen läßt! Mit diesem Kommentar möchte ich auch das Thema Choas - Theorie für diese Facharbeit abschließen.

7. Schlusswort

Diese Facharbeit wurde verfasst von Marcus Przykling [mp] und Nico Schottelius [ns]. Wir bedanken uns vielmals für die Ausgabe eines derart spannenden Themas und hoffen alle Leser und oder Zuhörer genossen diesen Einblick in eine unbekannte, für uns nicht mehr oder noch nicht erfassbare Welt!

8. Wer hat was gemacht ?

Die jeweilige Arbeitsaufteilung ist in folgender Tabelle zu ersehen :

Marcus	***Nico***
Punkt 2	Punkt 1
Punkte 3.1, 3.2, 3.2.1 (2D -> 1D)	Punkt 3 (2D -> 1D)
Punkt 4 (3D -> 2D)	Punkt 6 (Überlegungen von anderen Mathematikern)
Punkt 5 (4D -> 3D)	Punkt 7 (Schlusswort)
Punkt 8 (Wer hat was gemacht)	Punkt 9 (Arbeitsbericht)
Zusammenstellung der Texte	Bilder und Animationen
CD brennen	Punkt 10 (Quellen)

9.Arbeitsbericht

Bei der Arbeit mit der Facharbeit sind wir einem einfachen Konzept gefolgt. Zuerst einmal betrachteten wir unser Problem von der theorethischen Seite und besprachen gemeinsame Überlegungen. Nachdem wir dann einige interessante Stunden hinter uns gebracht hatten, kamen wir auf die Idee uns auch nach vorhandener Dokumentation umzusehen. Wir besuchten gemeinsam die Uni-Bibliothek in Hannover und sahen uns dort nach Büchern zum Thema Chaos-Theorie um. Warum gerade Chaos-Theorie ? Nach einem Gespräch auf der Arbeit mit Nico's Chef in Hannover hatten wir einen Tipp bekommen, dass es sich bei diesem Thema unter Umständen um einen Teilbereich der Chaos-Theorie handeln könnte. Allerdings waren die gefundenen Informationen so mißverständlich, dass wir die Idee der Chaos-Theorie nur minimal mit einbeziehen konnten. Nach einem weiteren Gespräch mit Nico's zweiten Chef, stellten wir ernüchternd fest, dass dieser ein ähnliches Thema schon einmal bearbeitet hatte, allerdings ist die gesamte Doku verschwunden. Somit stellten wir fest, dass wir unser Thema weiter im theoretischen Bereich ohne weitere Hilfe bearbeiten müssen. Im weiteren trafen wir uns nun jeden Montag nach der Mathematikstunde, um einen kurzen Statusbericht auszutauschen und jeden Donnerstag um größere Themen zu besprechen. Die letzten zwei Wochen haben wir jedoch die Intervalle verkürzt und haben uns bis zu 3 mal die Woche getroffen.

[ns]

10.Quellen

[1] Knaurs Lexikon a-z ISBN 3-426-03301-1, S.179
[2] Chaos: Einführung in eine neue physikalische Theorie von Georg Heinrichs, ISBN 3-7614-1469-2
[3] Chaos und Systeme von Morton John Canty, ISBN 3-528-05469-7